

Résolution empirique de l'énigme reliée à la rationalité des investisseurs

**Oussama Chakroun, Georges Dionne
et Amélie Dugas-Sampara**

**HEC Montréal
4 mai 2006**

(Version préliminaire, à ne pas citer)

Résumé

Nous examinons, d'un point de vue statistique, l'énigme de choix de portefeuille soulevée par Canner, Mankiw et Weil (1997). L'idée est de tester une conclusion de Elton et Gruber (2000) disant qu'un ratio obligations/actions décroissant par rapport à la tolérance au risque ne signifie pas nécessairement une contradiction par rapport à la théorie moderne de choix de portefeuille et ne remet pas en cause la rationalité des investisseurs. Dans une première étape, nous testons une proposition de Canner et al. (1997) qui suggère que la proportion du portefeuille en actions détenue par un individu représente une bonne mesure de sa tolérance au risque. La deuxième étape consiste à vérifier l'existence du théorème de séparation en deux fonds dans les données utilisées en adoptant les tests proposés par Beaulieu, Dufour et Khalaf (2003). En cas d'existence, nous pouvons affirmer l'absence de l'énigme de choix de portefeuille dans un environnement où tous les actifs sont risqués et où la contrainte d'absence de vente à découvert n'est pas serrée. Disposant de données relatives à la composition du portefeuille de 470 clients d'une firme de courtage canadienne, nous obtenons que le ratio obligations/actions est décroissant par rapport à la tolérance au risque. Nous vérifions la séparation à deux fonds sur l'ensemble des données disponibles aux investisseurs de notre échantillon.

Introduction

Maximiser le rendement de son portefeuille tout en minimisant le risque est toujours le problème à résoudre autant sur le plan pratique que théorique. En effet, nous assistons, depuis le début des années 50, à une panoplie de modèles théoriques se fixant pour objectif la résolution de ce problème de choix de portefeuille. Afin d'atteindre cet objectif, plusieurs hypothèses simplificatrices ont été considérées, telles que l'existence d'un marché sans frictions.

Dans cette recherche, nous nous proposons d'apporter des éléments de réponse à l'énigme de choix de portefeuille soulevée par Canner, Mankiw et Weil (1997). Rappelons que ces auteurs ont conclu à une divergence entre les recommandations de certains conseillers financiers et l'allocation rationnelle préconisée par la théorie financière moderne. En effet, l'observation d'un ratio obligations/actions décroissant en fonction de la tolérance au risque (mesurée par la proportion investie en actions) contredirait les conclusions de Markowitz (1952) si l'on considère la présence d'un actif sans risque puisqu'il fallait s'attendre à un ratio obligations/actions constant pour tout niveau de tolérance au risque.

Plusieurs études passées ont tenté de résoudre le paradoxe et ce en adoptant trois axes de recherche. Un premier axe considère des modèles dynamiques de choix de portefeuille : l'individu cherche à maximiser son utilité espérée tout en tenant compte de l'évolution future des rendements des différents actifs financiers (obligations, actions et la monnaie). On cite, à ce propos, les travaux de Bajoux-Besnainou, Jordan et Portait (2001, 2003), de Brennan et Xia (2000, 2002), de Campbell et Viceira (2001) et de Wachter (2003). Chacune de ses études considère une spécification particulière quant à la fonction d'utilité des individus (CRRA, HARA), la dépendance entre les différents actifs financiers, la prise en considération de l'inflation ou de l'horizon de temps considéré par l'individu (un nombre fini d'années ou un horizon infini).

Le second axe de recherche regroupe les études théoriques mono périodiques. Parmi ces études, on cite la contribution de Boyle et Gurthie (2005) qui, en considérant le capital

humain, aboutissent à la conclusion que la corrélation entre le rendement des actions et le capital humain pourrait engendrer un ratio obligations/actions décroissant en fonction de la tolérance au risque en dépit d'un contexte autorisant la vente à découvert et offrant un actif sans risque. Citons encore Elton et Gruber (2000) qui ont démontré que l'interdiction des ventes à découvert et/ou l'absence d'un actif sans risque peuvent expliquer la pente négative du ratio obligations/actions par rapport à la tolérance au risque. Cette dernière étude sera discutée en détail lors de la prochaine section.

Finalement, le troisième axe de recherche renferme des études empiriques à l'instar de Siebenmorgen et Weber (2000) qui ont focalisé leur intérêt sur les choix de portefeuilles préconisés par des conseillers financiers allemands. Ces auteurs concluent que les choix de ces conseillers sont rationnels si l'on considère un modèle de finance comportementale tel que celui présenté par Benartzi et Thaler (2001). Citons également Shalit et Yitzhaki (2003) qui ont utilisé les mêmes données que Canner et al. (1997) afin de tester la rationalité des individus. Ils ont, cependant, utilisé la dominance stochastique de second ordre comme critère de choix de portefeuille pour conclure par la suite à l'efficacité des recommandations des conseillers financiers.

Notre étude fait partie des deux derniers axes de recherche. En effet, on analysera dans la première section la rationalité des individus dans un cadre mono périodique de moyenne-variance. Par la suite, on exposera les résultats obtenus d'une base de donnée originale indiquant la composition du portefeuille de 470 investisseurs canadiens. On testera finalement la présence du théorème de séparation pour conclure sur la rationalité des investisseurs.

1 Rationalité des agents économiques

Démontrant que l'observation d'une courbe décroissante du ratio obligations/actions en fonction de la tolérance au risque pouvait être en conformité avec la théorie financière moderne, Elton et Gruber (2000) ont abouti à la conclusion que les allocations suggérées

par certains conseillers financiers¹ pouvaient être qualifiées de rationnelles. Cette disparité par rapport aux conclusions de Canner et al. (1997) provient essentiellement du contexte considéré : l'existence ou non d'un actif sans risque et la possibilité ou non de ventes à découvert.

Parmi les règles gouvernant le marché, on cite la possibilité ou non de ventes à découvert. En effet, passer du cas autorisant les ventes à découvert au cas qui les interdit est de nature à engendrer une multitude de changements. Une première conséquence consiste en le rétrécissement du nombre de combinaisons possibles pour l'investisseur. La deuxième conséquence de ce changement est relative à la détermination des combinaisons optimales du point de vue moyenne-variance pour ce même investisseur. À cet égard, il est à noter que l'interdiction des ventes à découvert est de nature à compliquer la résolution du problème de choix du portefeuille. En effet, la solution analytique retrouvée dans un cadre autorisant les ventes à découvert cesse d'être valable en imposant une contrainte interdisant la détention de proportions négatives dans chacun des actifs financiers. Dans un tel cas, l'unique alternative pour résoudre les problèmes d'allocation optimale consisterait en une résolution via des méthodes numériques.

Certes, la possibilité de ventes à découvert serait préférée pour les raisons citées précédemment; il ne faut toutefois pas perdre de vue les pratiques courantes sur les marchés financiers. En effet, il est rarissime de retrouver des marchés autorisant les ventes à découvert sans contrainte pour les individus. Il s'agit également d'une pratique peu encouragée chez le courtier d'où parviennent les données de notre étude. Ceci est principalement dû aux coûts supplémentaires qu'engendre une position courte dans un titre financier ainsi qu'aux risques additionnels pour son détenteur. Ces risques sont d'autant plus importants en présence de marchés peu liquides. Notons finalement que Jones et Lamont (2002) et Lamont (2004) ont confirmé l'existence des contraintes interdisant les ventes à découvert dans certains marchés financiers; ce constat est fondé sur l'observation

¹ Il s'agit de Fidelity, Jan Bryant Quinn, Merrill Lynch et les recommandations du New York Times. Tous ces conseillers étaient considérés par l'article de Canner et al. (1997).

de plusieurs titres excessivement surévalués sur ces marchés². Il n'est cependant pas évident que ces contraintes soient restrictives dans tous les marchés, particulièrement dans celui des petits investisseurs individuels, qui font l'objet de notre étude.

Intéressons-nous maintenant à l'hypothèse d'existence d'un actif sans risque. Le fait qu'il y ait un actif sans risque ou non importe peu pour la résolution du problème du choix de portefeuille, si on suppose la possibilité de ventes à découvert. En effet, il est possible de déterminer analytiquement les combinaisons optimales à choisir pour tout niveau de risque. Si nous abordons, d'un point de vue pratique, l'existence d'un tel actif sur les marchés financiers, les conclusions sont moins évidentes. Malgré l'existence d'un très grand nombre d'obligations corporatives ou gouvernementales offrant un taux d'intérêt nominal constant sur les marchés, il serait dangereux d'affirmer la présence d'un actif sans risque dans l'économie. En effet, la fluctuation des taux d'inflation induit une variation de la rémunération (en termes réels) offerte par ces obligations à travers le temps. Toutefois, le fait de s'intéresser à un horizon de temps court pourrait être synonyme d'une faible variation du taux d'inflation et, par conséquent, en faveur de l'hypothèse d'existence d'un actif sans risque.

Examinons l'implication de chacun de ces contextes sur l'allocation optimale de la richesse ou, plus précisément, sur la variation du ratio obligations/actions en fonction de la tolérance au risque. En présence d'un actif sans risque et en ayant la possibilité de ventes à découvert, il faut s'attendre à un ratio obligations/actions constant pour tous les individus (peu importe leur niveau de tolérance au risque). Ce ratio devient une fonction monotone³ (croissante ou décroissante) en considérant les rendements en terme réels (synonyme d'absence d'actif sans risque dans une économie avec inflation). L'interdiction des ventes à découvert, quant à elle, aura pour effet deux variations possibles : soit un ratio obligations/actions décroissant pour tout niveau de tolérance au risque, soit un ratio croissant pour des niveaux de tolérance relativement faibles mais décroissant par la suite.

² Jarrow (1980) a démontré que la contrainte interdisant les ventes à découvert implique une hausse du prix des actifs risqués lorsque tous les individus considèrent la même matrice de variance-covariance.

³ Résultat obtenu à partir d'un théorème de Roll (1977).

Ainsi, comme le soulignent Elton et Gruber (2000), l'observation d'une pente négative du ratio obligations/actions en fonction de la tolérance au risque ne devrait pas être synonyme de non-optimalité du choix des investisseurs. Au contraire, les contextes théoriques menant à ce constat semblent plus proches de la pratique. La Figure 1 résume les cas analysés par Elton et Gruber (2000).

Figure 1
Vente à découvert et actif sans risque
sur les choix de portefeuilles optimaux

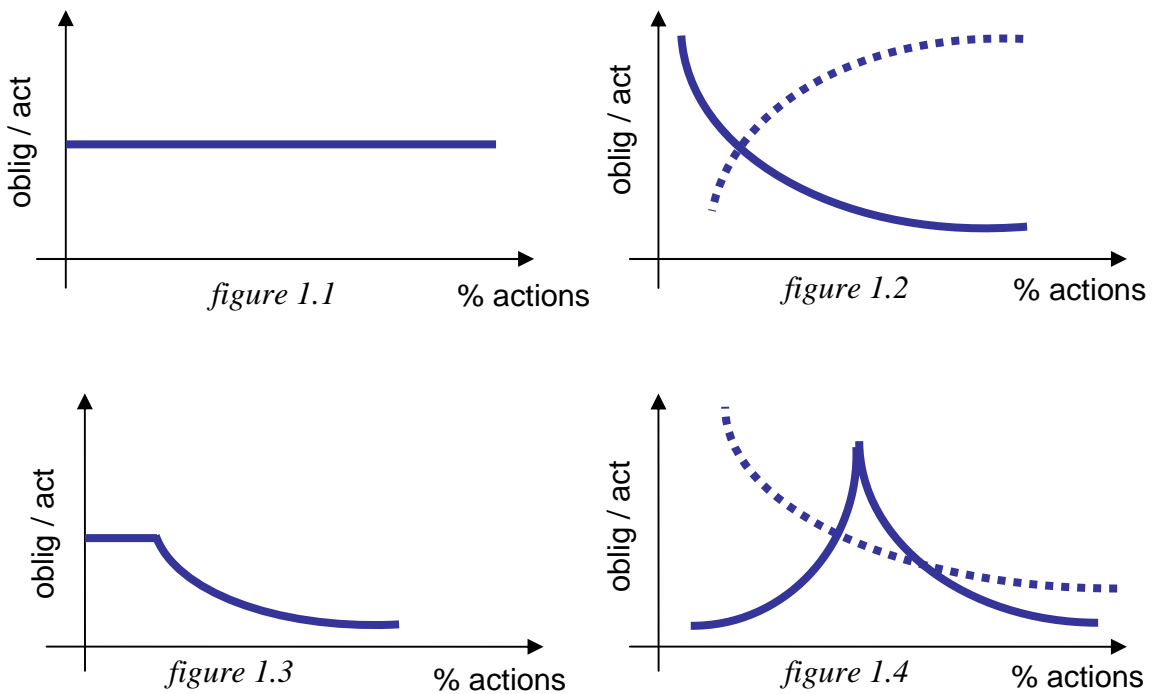


figure 1.1 : possibilité de vendre à découvert et existence de l'actif sans risque
figure 1.2 : possibilité de vendre à découvert et absence de l'actif sans risque
figure 1.3 : interdiction de vendre à découvert et existence de l'actif sans risque
figure 1.4 : interdiction de vendre à découvert et absence de l'actif sans risque

2 Relation empirique des choix d'investisseurs en fonction de leur tolérance au risque

2.1 Données

Cherchant à résoudre cette énigme de choix de portefeuille soulevée par Canner et al. (1997), on a utilisé des données obtenues auprès d'une firme de courtage canadienne spécialisée dans les services financiers aux particuliers. L'originalité de cette base de données est qu'elle contient les positions individuelles choisies plutôt que les produits offerts par les courtiers, comme dans Canner et al. (1997). En effet, ces données indiquent la composition du portefeuille⁴ de 470 clients de cette firme au mois de juillet 2000, ainsi que leurs caractéristiques individuelles telles que l'âge, les connaissances en matière de placement, les revenus, les objectifs de placement...

Le Tableau 1, en annexe, présente les données.

Par ailleurs, 58,2 % des individus pensent disposer de connaissances passables en matière de placement. La proportion de ceux ayant une bonne connaissance s'élève à 33,9 %, alors que ceux admettant une excellente connaissance représentent 3,7 % de l'échantillon. Les 4,2 % restant ne disposent d'aucune connaissance en la matière.

La distribution de l'avoir total net des investisseurs est donnée au Tableau 2.

Un autre aspect auquel nous sommes intéressés concerne les types de comptes détenus par ces clients. En effet, cette donnée pourrait mieux nous informer quant à l'aversion au risque de chacun des individus. Les observations recueillies laissent voir que tous les clients détiennent un compte courant. Parmi ces clients, 67 % ont également un compte de fonds de pension; 15 % détiennent un compte de marge (**vente à découvert**) et 2 % ont à la fois un compte de marge et un compte de fonds de pension.

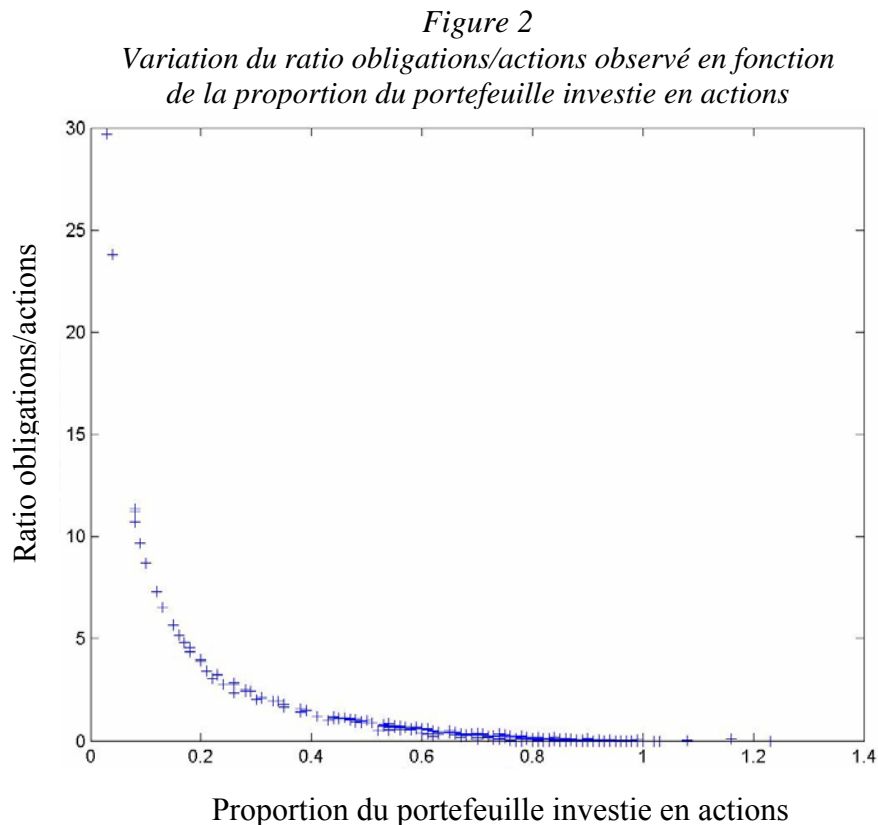
⁴ Le portefeuille est réparti entre trois classes d'actifs, à savoir : les bons du Trésor, les obligations et les actions.

Une dernière donnée susceptible d'influencer le choix en matière de placement concerne le conseiller financier avec qui chacun des clients fait affaire. Dans notre cas, les 470 individus retenus se réfèrent à 4 conseillers financiers. Le Tableau 3 indique la proportion des clients détenus par chaque conseiller ainsi qu'une brève description le concernant.

À cet égard, notons que les clients des conseillers financiers 3 et 4 ont été jumelés, puisque ces deux conseillers travaillent ensemble, ont le même type de gestion et le même type de clients (âge, richesse, ...).

2.2 Tolérance au risque et choix de portefeuille

De nos données, il est aisé de représenter graphiquement les ratios obligations/actions détenus par 358 des 470 clients⁵ et ce, en fonction de leur degré de tolérance au risque, évalué par la proportion investie en actions (voir Figure 2).



⁵ Certains clients ne détiennent pas d'actions dans leur portefeuille. Il devient ainsi impossible de calculer leur ratio obligations/actions.

L'observation de la Figure 2 laisse voir une pente négative du ratio obligations/actions par rapport à la proportion du portefeuille investie en actions. Ce constat ne devrait toutefois pas impliquer une confirmation du paradoxe cité plus haut. En effet, comme étape préliminaire de notre étude, il est judicieux de vérifier si la proportion investie en actions représente une bonne mesure de tolérance au risque. Un deuxième indice de tolérance au risque « $T(ind)$ » est ainsi calculé pour chacun des clients et se base sur leurs objectifs de placement :

$$T(ind) = \frac{1 * rev\% + 2 * croiss\% + 3 * spéc\%}{3} \quad \text{où} \quad \frac{1}{3} \leq T(ind) \leq 1. \quad (1)$$

$T(ind)$: mesure indirecte de tolérance au risque⁶;

rev : objectif de placement en titres à revenus (en pourcentage du portefeuille total);

$croiss$: objectif de placement en titres de croissance (en pourcentage du portefeuille total);

$spéc$: objectif de placement en titres de spéculation (en pourcentage du portefeuille total);

Avec $rev \% + croiss \% + spéc \% = 100 \%$.

À titre indicatif, notons que la moyenne de ce deuxième indice de tolérance au risque s'élève à 56 % pour l'ensemble des individus considérés (contre une moyenne de 57 % en considérant la mesure directe de tolérance au risque).

Une fois cette mesure indirecte de tolérance au risque estimée, nous pouvons effectuer les régressions suivantes afin de tester l'équivalence entre les deux mesures.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 T(dir) + \beta_2 Z + \varepsilon \quad (R1)$$

$$Y = \beta_3 + \beta_4 T(ind) + \beta_5 Z + \varepsilon \quad (R2)$$

où :

Y : proportion investie en obligations⁷;

⁶ Qualifiée de mesure indirecte de tolérance au risque.

⁷ On a utilisé la proportion investie en obligations comme variable dépendante afin d'inclure le maximum d'observations, à savoir 405 clients disposant de toute l'information nécessaire à la régression. En effet, le

$T(dir)$: mesure directe de tolérance au risque, mesurée par la proportion investie en actions;

$T(ind)$: mesure indirecte de tolérance au risque;

Z : vecteur des caractéristiques individuelles de chaque investisseur telles que l'âge, le revenu, le montant du portefeuille, les connaissances en placement...

Les résultats de ces deux régressions sont présentés au Tableau 4 (R1 et R2).

Finalement, le test d'équivalence des deux mesures de tolérance (comparaison entre les paramètres $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_4$) indique qu'ils ne sont pas statistiquement différents à un degré de confiance de 95 %. Ce constat est réaffirmé, par la suite, en s'assurant que les résultats obtenus ne sont pas dus à un problème de spécification économétrique.

La proportion investie en actions représente donc une bonne mesure de tolérance au risque et ne peut être avancée comme explication plausible au paradoxe soulevé par Canner et al. (1997).

Partant de ce constat, nous nous proposons d'analyser la variation du ratio obligations/actions par rapport à la tolérance au risque de chacun des 405 clients. Nous cherchons ainsi à expliquer le choix de portefeuille des individus par leur tolérance respective au risque et certaines autres variables caractérielles (âge, revenu annuel...). De la régression R1, il est aisé de vérifier si le ratio obligations/actions demeure constant pour tous les clients considérés. En effet, ce ratio (qu'on désigne par r) peut être exprimé comme suit :

$$r = \frac{Y}{T(dir)} = \frac{\beta_0 + \beta_1 T(dir) + \beta_2 Z + \varepsilon}{T(dir)} = \beta_1 + \frac{\beta_0 + \beta_2 Z}{T(dir)} + \varepsilon' \quad (2)$$

ε' étant le nouveau terme d'erreur.

recours au ratio obligations/actions comme variable dépendante diminuera de 23 % le nombre d'observations (93 parmi les 405 clients).

Ainsi, la variation du ratio r par rapport à la tolérance au risque serait égale à :

$$\frac{\partial r}{\partial T(dir)} = -\frac{\beta_0 + \beta_2 Z}{[T(dir)]^2} \quad (3)$$

Par conséquent, tester si le ratio r est constant pour tous les individus revient à tester si $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_2$ sont statistiquement et conjointement égaux à zéro⁸. Le test de Fisher rejette cette hypothèse à un degré de confiance de 95% et indique un ratio obligations/actions décroissant en fonction de la tolérance au risque pour les individus considérés.

Comme le notent Elton et Gruber (2000), ce rejet de l'hypothèse d'un ratio obligations/actions constant pour tous les individus ne devrait pas être interprété comme une confirmation du paradoxe d'allocation d'actifs soulevé par Canner et al. (1997). En effet, il serait judicieux de tester si les investisseurs considérés ont fait leur choix de portefeuille dans un contexte vérifiant le théorème de séparation en deux fonds et vérifier ainsi la rationalité de leur comportement.

3 Test du théorème de séparation

Une hypothèse de base utilisée dans cette recherche consiste à considérer le modèle moyenne-variance qui permet la séparation à deux fonds lorsque les distributions des rendements font partie de la famille elliptique⁹ pour toute fonction d'utilité croissante et concave. S'assurer que les rendements des actions, des obligations et de la monnaie fassent partie de la famille des distributions elliptiques nous permettra de consolider nos conclusions sur la rationalité des détenteurs de portefeuille. Par conséquent, il serait

⁸ Un test d'Hausman a été mené au préalable afin de s'assurer que la régression ne présentait aucun problème d'endogénéité.

⁹ Voir Owen et Rabinovitch (1983).

judicieux de présenter, dans un premier temps, les données qu’auraient pu utiliser les individus sujets de notre étude lors de leur choix de portefeuille.¹⁰

3.1 Rendements des actifs financiers

Afin d’évaluer les rendements considérés par les individus de notre base de données pour leur choix de portefeuille, on a eu recours aux performances réalisées par certains fonds mutuels canadiens. En effet, les rendements réalisés par les fonds mutuels représentent un bon indicateur des différents marchés financiers (Barras, Scaillet et Wermers, 2005). En général, une faible proportion de fonds mutuels réalisent des sous-performances et celles-ci sont rares ou aléatoires¹¹.

Nous nous intéresserons donc aux rendements réalisés par les fonds *Férique Actions*, *Férique Obligations* et *Férique Revenu à court terme* afin d’évaluer les rendements considérés par les 470 individus de notre échantillon. Les informations disponibles au prospectus de chacun de ces fonds expliquent mieux notre choix. En effet, le fonds *Férique Actions* se fixe comme objectif l’obtention d’une appréciation à long terme du capital en investissant dans des actions de sociétés canadiennes. Le fonds *Férique Obligations*, quant à lui, vise à obtenir un revenu courant élevé et, à l’occasion, une appréciation du capital en investissant dans des obligations canadiennes. Son portefeuille est composé d’obligations canadiennes émises par le gouvernement canadien, les provinces, les municipalités et les sociétés. Finalement, le fonds *Férique Revenu à court terme* se propose d’obtenir un revenu courant tout en protégeant le capital et maintenant une liquidité élevée. Son portefeuille est composé à 80 % de dettes émises au Canada dont l’échéance est inférieure à 6 mois.

Les rendements des trois fonds cités précédemment ont été observés mensuellement entre janvier 1995 et juin 2000¹². Trois remarques justifient un tel choix. Pour débiter, rappelons

¹⁰ Notre base de données ne contient que les choix réalisés à une date donnée.

¹¹ Barras et al. (2005) recensent, uniquement, 20 % de l’ensemble des fonds mutuels d’actions qui affichent une sous-performance, en se basant sur des données provenant des États-Unis.

¹² Ces rendements sont disponibles sur le site des fonds Férique (www.ferique.com).

que la composition du portefeuille de chaque individu était celle du mois de juillet 2000. Il est donc raisonnable de considérer des rendements précédant cette date. Une deuxième question en rapport avec ces données concerne leur fréquence d'observation. Signalons à ce niveau que la considération de rendements mensuels est conforme à plusieurs travaux¹³ traitant du problème de choix du portefeuille. Finalement, considérer une période d'observation avoisinant les cinq années semble être un choix judicieux. En effet, une période plus courte mène à des résultats peu précis, alors qu'une très longue période conduit à des estimations pouvant être affectées par des changements de régime.

Notons également la forte corrélation existant entre les rendements des trois fonds considérés et ceux obtenus par certains indices usuels durant la période allant de janvier 1995 à juin 2000. En effet, on observe un coefficient de corrélation de 91,97 % entre le rendement du fonds *Férique Actions* et le rendement de l'indice TSE300. Nous obtenons un coefficient de corrélation de 87,24 % entre le rendement du fonds *Férique Obligations* et celui réalisé par l'indice Scotia Capital (Overall Universe)¹⁴. Finalement, la corrélation entre le rendement du fonds *Férique Revenu à court terme* et le rendement moyen sur les bons du trésor à 1 mois¹⁵ s'élève à 80,39 %.

Une fois ces rendements historiques définis, nous sommes en mesure de déterminer s'ils peuvent être considérés comme faisant partie de la famille des distributions elliptiques.

3.2 Test d'ellipticité des rendements des actifs financiers

Deux familles de tests sont généralement utilisées afin de déterminer la nature des distributions multivariées : il s'agit des tests du type Jarque-Bera (1987) et des tests du type Mardia (1970). Parmi les premiers, on cite celui introduit par Kilian et Demiroglu (2000),

¹³ Selon Elton et Gruber (2000) "*in finance, it is common to use monthly intervals to measure returns used in estimating expected returns, variances and covariances*".

¹⁴ Les rendements relatifs à l'indice TSE 300 et à l'indice Scotia Capital sont prélevés de la base Datastream.

¹⁵ Cette donnée est obtenue du site de la Banque du Canada, l'identificateur étant le V122529 au répertoire CANSIM.

se basant sur un calcul du degré d'asymétrie et d'aplatissement de chaque variable aléatoire à part dans un premier temps. Une agrégation des ces résultats univariés donne des statistiques relatives à la distribution multivariée. Les tests du type Mardia permettent de calculer directement le degré d'asymétrie multivarié ainsi que le degré d'aplatissement multivarié. Ces tests ont l'avantage de prendre en considération les corrélations existant entre les différentes variables aléatoires formant la distribution jointe. Ces tests aboutissent finalement aux mêmes résultats que ceux obtenus via le test de Jarque-Bera, si on se place dans le cas univarié, et semblent les mieux appropriés au cas multivarié.

Un test du type Mardia se base sur deux statistiques, à savoir : le degré d'asymétrie multivarié (*MSK*) et le degré d'aplatissement multivarié (*MKU*). Nous présentons, dans un premier temps, ces deux statistiques. Nous exposons ensuite la méthodologie adoptée afin de déterminer la nature de la distribution jointe entre les rendements des actions et des obligations et de la monnaie.

Soit N actifs risqués observés sur T périodes; nous avons T vecteurs R_1, R_2, \dots, R_T ; chaque vecteur contient les rendements observés à une date donnée pour les N actifs risqués considérés.

Notons par d_{ts} l'ensemble des éléments de la matrice $(R_t - \bar{R})' S^{-1} (R_s - \bar{R})$ pour tout t et s compris entre 1 et T ; \bar{R} étant le vecteur des rendements moyens et S la matrice de variance-covariance des mêmes rendements. Le degré d'asymétrie et le degré d'aplatissement sont calculés comme suit :

$$MSK = \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T d_{ts} \quad \text{et} \quad MKU = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T d_{tt}^2. \quad (4)$$

Ces deux statistiques serviront de base pour déterminer la distribution des rendements observés des actions et des obligations. La première étape consiste à calculer les statistiques *MSK* et *MKU* (qu'on notera respectivement par *MSK_{obs}* et *MKU_{obs}*) relatives à la série de rendements observés. La deuxième étape se base sur des simulations; nous

procédons à T tirages de N variables aléatoires selon une distribution bien déterminée (Student multivariée, normale multivariée, ...) tenant compte d'une matrice de variance-covariance équivalente à celle relative aux observations. À partir de ces données simulées, il est possible de calculer les statistiques MSK et MKU . Les résultats obtenus seront notés par $MSK_{sim,1}$ et $MKU_{sim,1}$. Une répétition de ces simulations M fois nous permet d'obtenir les deux vecteurs suivants : $MSK_{sim} = [MSK_{sim,1}, MSK_{sim,2}, \dots, MSK_{sim,M}]'$ et $MKU_{sim} = [MKU_{sim,1}, MKU_{sim,2}, \dots, MKU_{sim,M}]'$. Nous procédons ensuite au classement des éléments de ces deux vecteurs pour retrouver les vecteurs MSK_{sim}^{ord} et MKU_{sim}^{ord} . Finalement, le fait de remarquer que MSK_{obs} est comprise entre la $\left[\frac{\alpha}{2}M + 1\right]^{eme}$ valeur et la $\left[\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)M - 1\right]^{eme}$ valeur du vecteur MSK_{sim}^{ord} et que MKU_{obs} est comprise entre la $\left[\frac{\alpha}{2}M + 1\right]^{eme}$ valeur et la $\left[\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)M - 1\right]^{eme}$ valeur du vecteur MKU_{sim}^{ord} nous permet de conclure que les rendements observés suivent la distribution multivariée de laquelle nous avons fait des simulations avec un seuil de confiance de $(1 - \alpha)$.

Appliquons la méthodologie décrite plus haut à notre contexte actuel : l'observation des rendements mensuels notés entre janvier 1995 et juin 2000 pour les fonds *Férique Actions*, *Férique Obligations* et *Férique Revenu à court terme*. Les statistiques relatives aux rendements observés s'élèvent à 2,2493 et 15,7729 respectivement pour le degré d'asymétrie et le degré d'aplatissement. Ces valeurs permettent de conclure, à un seuil de confiance de 95 %, que les rendements observés ne nous permettent pas de rejeter la distribution Student multivariée avec 10 degrés de liberté¹⁶. En effet, l'intervalle de confiance relatif au degré d'asymétrie est égal à [0,3915; 4,9090], alors que celui relatif au degré d'aplatissement correspond à [13,4822; 23,9927].

Le fait d'aboutir au résultat que les rendements des actions, des obligations et de la monnaie peuvent correspondre à l'une des distributions elliptiques (la distribution Student à

¹⁶ Ces résultats sont obtenus en se basant sur 9 999 simulations.

10 degrés de liberté) nous assure toutefois de la pertinence du critère moyenne-variance et de la séparation des portefeuilles.

3.3 Test du Black-CAPM avec des rendements non normaux

Beaulieu, Dufour et Khalaf (2003) ont présenté un test de la version Black du CAPM en présence de rendements non gaussiens. Il est judicieux d'adopter leur méthodologie, puisque nous sommes en présence d'uniquement trois actifs risqués, dont les rendements semblent correspondre à une distribution Student. Présentons alors la méthodologie utilisée pour tester le Black-CAPM (BCAPM) et essayons de l'appliquer à notre contexte particulier. Une brève introduction s'avère indispensable, toutefois, afin d'exposer les notations à utiliser.

Notons par R_{it} , $i = 1, \dots, n$ les rendements de n actifs risqués durant la période t (t allant de 1 à T) et par \tilde{R}_{Mt} le rendement du portefeuille de marché. Ainsi, le test BCAPM se basera sur le modèle suivant :

$$R_{it} = a_i + b_i \tilde{R}_{Mt} + u_{it} \quad ; \quad t = 1, \dots, T, i = 1, \dots, n \quad (5)$$

où u_{it} désigne le terme d'erreur. En effet, tester le BCAPM revient à vérifier s'il existe un scalaire γ (le rendement du portefeuille à zéro bêta dont nous ignorons la composition) tel que :

$$H_{BCAPM} : a_i = \gamma(1 - b_i) \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (6)$$

Le modèle (5) peut être réécrit sous la forme matricielle :

$$Y = XB + U \quad (7)$$

avec :

$$Y = [R_1, \dots, R_n], \quad X = [t_T, \tilde{R}_M];$$

$$R_i = (R_{1i}, \dots, R_{Ti})'; \tilde{R}_M = (\tilde{R}_{1M}, \dots, \tilde{R}_{TM})' \text{ et } \iota_T = (1, \dots, 1)'$$

Finalement, le test d'hypothèse présenté en (6) se base sur le calcul du ratio de quasi vraisemblance défini comme suit :

$$LR_{BCAPM} = T \ln(\Lambda_{BCAPM}) \text{ avec } \Lambda_{BCAPM} = \frac{|\hat{\Sigma}_{BCAPM}|}{|\hat{\Sigma}|}, \quad (8)$$

où :

$$\hat{\Sigma} = \hat{U}'\hat{U}/T ; \hat{U} = Y - X\hat{B} \text{ et } \hat{B} = (X'X)^{-1}X'Y.$$

$\hat{\Sigma}_{BCAPM}$, quant à lui, désigne l'estimateur de $\hat{\Sigma}$, en considérant le modèle contraint qui vérifie l'hypothèse (6).

Une hypothèse de base de la méthodologie de Beaulieu et al. (2003) est la possibilité de réécrire le vecteur $U_t = (u_{1t}, \dots, u_{nt})'$ comme le produit d'une matrice triangulaire inconnue J et un vecteur $W_t = (W_{1t}, \dots, W_{nt})'$ dont la distribution jointe est complètement spécifiée. On obtient ainsi les deux égalités suivantes :

$$U_t = JW_t \quad (9)$$

$$\Sigma = JJ', \quad (10)$$

où Σ désigne la matrice variance-covariance du vecteur U_t .

Étant donné cette hypothèse considérée par Beaulieu et al. (2003), le ratio de vraisemblance, défini par l'expression (8) et permettant de tester si le scalaire γ_0 vérifie l'hypothèse (6), est distribué comme suit :

$$LR(\gamma_0) = T \ln(|W'M_0W|/|W'MW|) \quad (11)$$

où :

$$M = I - X(X'X)^{-1}X'$$

et

$$M_0 = M + X(X'X)^{-1}H'[H(X'X)^{-1}H']^{-1}H(X'X)^{-1}X'$$

$$\text{avec } H = [1 \quad \gamma_0] \text{ et } W = [W_1, \dots, W_T]'.$$

Le test du BCAPM revient ainsi à fixer, dans une première étape, une valeur pour le scalaire γ_0 et à calculer le ratio de vraisemblance qui en découle. La deuxième étape consiste à simuler N tirages de la distribution multiavriée W . Pour chacun de ces tirages, nous calculons le ratio de vraisemblance tel que défini par l'expression (11). Le calcul de la *p-value* spécifique au scalaire γ_0 s'obtient comme suit :

$$\hat{p}_N(LR(\gamma_0) | \nu) = \frac{\hat{G}_N(\gamma_0, \nu) + 1}{N + 1}, \quad (12)$$

où ν désigne les paramètres de la distribution utilisée lors des simulations (tels que le degré de liberté lors de la simulation d'une distribution Student) et $\hat{G}_N(\gamma_0, \nu)$ correspond au nombre de ratios issus des simulations et supérieurs au ratio calculé à partir des observations.

Ce calcul des *p-values* est répété pour plusieurs valeurs possibles de γ_0 et la *p-value* du test de BCAPM est obtenue comme suit :

$$\hat{p}_N^*(LR_{BCAPM} | \nu) = \sup_{\gamma_0} \hat{p}_N(LR(\gamma_0) | \nu). \quad (13)$$

En définitif, la règle de décision concernant le test d'hypothèse cité en (6) consiste à comparer la *p-value* reportée en (13) et le seuil de significativité α considéré : si la *p-value* est supérieure à α , on ne rejette pas l'hypothèse du BCAPM.

Appliquons maintenant ce test de BCAPM à notre contexte particulier. En considérant le fonds *Férique Équilibré* comme portefeuille de marché¹⁷ et en se basant sur les résultats relatifs à la distribution des rendements des fonds *Férique Actions*, *Férique Obligations* et *Férique Revenu à court terme* (la distribution Student à 10 degrés de liberté), nous arrivons à la conclusion que le BCAPM n'est pas rejeté pour un seuil de confiance de 95 % et en considérant 9 999 simulations de la distribution Student multivariée à 10 degrés de liberté (voir annexe 3 pour la présentation en détail des résultats empiriques).

Afin de consolider ce constat, il est judicieux de mener certains tests de robustesse. En effet, nos résultats présentés précédemment pourraient dépendre des approximations du rendement des actions, des obligations, des liquidités et du marché. Ces résultats pourraient également être tributaires de la méthodologie utilisée pour tester le BCAPM.

3.4 Robustesse des résultats

Notre premier test de robustesse concerne la mesure de tolérance au risque. En effet, les résultats découlant de la mesure indirecte de tolérance au risque définie en (1) pourraient dépendre des coefficients attribués. Il y a également possibilité de mauvaise interprétation de ces coefficients : il est arbitraire de supposer qu'un investisseur qui place son argent dans des actifs spéculatifs est 3 fois plus tolérant au risque qu'un investisseur plaçant son argent dans des actifs à revenu.

Nous proposons ainsi une troisième mesure de tolérance au risque qui se définit comme suit :

$$T3 = \frac{R_{mon} * mon\% + R_{obl} * obl\% + R_{act} * act\%}{R_{act}} \quad (14)$$

¹⁷ On considère les rendements mensuels entre janvier 1995 et juin 2000. Le portefeuille de ce fonds est composé d'actions, obligations ainsi que d'actifs à court terme.

où *mon %*, *obl %* et *act %* représentent respectivement les proportions détenues par chaque investisseur en monnaie, obligations et actions. *Rmon*, *Robl* et *Ract* désignent les rendements moyens de la monnaie, des obligations et des actions considérés par tous les investisseurs¹⁸.

En effet, un investisseur plus tolérant au risque aura tendance à placer sa richesse dans des actifs financiers à risque élevé, synonyme de rendement plus élevé. Ainsi, le rendement du portefeuille d'un individu devrait indiquer sa tolérance au risque.

La régression de la proportion investie en obligations par rapport à cette nouvelle mesure de tolérance au risque est présentée dans le Tableau 4 (*R3*).

Cette mesure composite définie par les rendements moyens des différents actifs financiers ainsi que la composition du portefeuille indique, elle aussi, une pente négative du ratio obligations/actions par rapport à la tolérance au risque avec un seuil de confiance de 95 %.

Notre deuxième test de robustesse consistera à l'utilisation d'autres approximations pour le calcul du rendement des actions, des obligations, des liquidités et du marché. Comme alternative, nous nous basons sur les rendements réalisés par certains fonds gérés par Talvest fonds d'investissement ou par les fonds mutuels TD entre janvier 1995 et juin 2000¹⁹.

En se basant sur les fonds Talvest, nous avons sélectionné le fonds *Actions Valeurs Canadiennes Talvest* afin d'évaluer le rendement des actions. En effet, l'objectif de ce fonds, tel qu'indiqué au prospectus, est d'obtenir une croissance du capital supérieure à la moyenne à long terme, en investissant principalement dans des titres de participation canadiens.

¹⁸ Dans notre cas, ces rendements moyens s'élèvent respectivement à 0,4 %, 0,7 % et 1,34 %, en supposant que les individus considèrent les fonds *Férique* afin de déterminer leurs choix de portefeuille.

¹⁹ Les rendements des fonds sélectionnés sont disponibles directement aux deux sites web suivants : www.talvest.com et www.tdcanadatrust.com.

Le rendement des obligations est évalué par la performance réalisée par le fonds d'*Obligations Talvest*. L'objectif de ce fonds est l'obtention d'un revenu courant élevé tout en préservant le capital, en investissant principalement dans des obligations, des débetures, des billets et d'autres titres de créance émis par des institutions financières des sociétés et des gouvernements canadiens.

L'approximation du rendement des liquidités, quant à elle, est obtenue via les rendements du fonds du *Marché Monétaire Talvest*. En effet, ce fonds se propose d'obtenir un revenu élevé tout en préservant le capital et la liquidité, en investissant principalement dans des titres de créance à court terme de haute qualité émis ou garantis par le gouvernement du Canada ou d'une province canadienne, des obligations émises par des banques, des sociétés de fiducie et des sociétés par actions canadiennes.

Un premier test appliqué aux rendements de ces trois fonds ne nous permet pas de rejeter l'hypothèse nulle de rendements distribués elliptiquement au seuil de confiance de 95 %. En effet, le degré d'asymétrie de la distribution jointe de ces rendements s'élève à 1,7369, alors que le degré d'aplatissement est égal à 17,9584. Ces statistiques appartiennent aux intervalles de confiance au seuil de 95 % pour certaines distributions elliptiques (la Student multivariée avec 15 degrés de liberté par exemple²⁰) et ce, en considérant 9 999 simulations.

Ce non-rejet de l'ellipticité des rendements nous permet de recourir au test du BCAPM en appliquant la méthodologie de Beaulieu et al. (2003). Le portefeuille de marché considéré lors de ce test correspond au *fonds Canadien de répartition d'actif Talvest*, qui propose, comme objectif, l'obtention d'une croissance du capital stable à long terme, en investissant principalement dans un portefeuille équilibré composé de titres de créance et de titres de participation canadiens, notamment des instruments du marché monétaire.

²⁰ L'intervalle de confiance du degré d'asymétrie est [0,3327; 3,3099], alors que celui du degré d'aplatissement est [13,0665 ; 20,8151] au seuil de confiance de 95 % et pour la distribution Student à 15 degrés de liberté.

Le test du BCAPM, à la manière de Beaulieu et al. (2003) et en utilisant les fonds Talvest, ne nous permet pas de rejeter l'hypothèse nulle de la présence du théorème de séparation au seuil de confiance de 95 % et en tenant compte de 9 999 simulations de la distribution Student multivariée.

La méthodologie citée plus haut est aussi appliquée aux fonds TD. On sélectionne ainsi le *Fonds du marché monétaire canadien TD*, le *Fonds d'actions canadiennes TD* et le *Fonds d'obligations canadiennes TD* afin d'évaluer, respectivement, le rendement des liquidités, des actions et des obligations échangées au Canada.

En nous basant sur ces données également, nous ne rejetons pas l'hypothèse d'ellipticité des rendements au seuil de confiance de 95 %. En effet, nous obtenons un degré d'asymétrie de 2,0406 et un degré d'aplatissement de 17,1734 pour la distribution jointe, alors que les intervalles de confiance obtenus pour une distribution Student multivariée de 8 degrés de liberté sont [0,4466; 6,6795] et [13,8692; 27,0550] respectivement.

Ce constat nous mène à tester le BCAPM en considérant comme portefeuille de marché le Fonds équilibré TD. En appliquant la méthodologie citée plus haut et en nous basant sur 9 999 simulations, nous en arrivons au non-rejet du BCAPM au seuil de confiance de 95 %.

Nous ne pouvons donc pas remettre en cause l'existence du théorème de séparation par une éventuelle mauvaise approximation du rendement des actions, des obligations, des liquidités et du marché.

Il serait également judicieux d'appliquer une deuxième méthodologie pour tester le BCAPM en présence de rendements non gaussiens. Cette deuxième technique s'inspire du travail de Zhou (1993) et se différencie du travail de Beaulieu et al. (2003) par la non-séparation entre les termes de nuisance (la matrice triangulaire inconnue : J) et le vecteur W , dont la distribution jointe est complètement spécifiée. En adoptant cette deuxième méthodologie, la distribution du ratio de vraisemblance sera :

$$LR(\gamma_0) = T \ln \left(\frac{|\hat{U}' M_0 \hat{U}|}{|\hat{U}' M \hat{U}|} \right). \quad (15)$$

\hat{U} , M_0 et M sont tels que définis précédemment.

Il suffit ainsi d'appliquer la méthodologie proposée par Beaulieu et al. (2003), mais en procédant à des tirages à partir d'une distribution U au lieu de la distribution complètement spécifiée W .

L'application de cette méthodologie à nos trois familles de fonds (Férique, Talvest et TD) ne nous permet pas de rejeter l'hypothèse nulle d'existence du théorème de séparation et ce, au seuil de confiance de 95 %. Pour chacun des trois tests, nous avons eu recours à 9 999 simulations à partir de distributions Student multivariées (voir annexe 3 pour la présentation en détail des résultats empiriques).

Conclusion

Nous avons cherché à apporter des nouveaux éléments de réponse quant au paradoxe d'allocation d'actifs soulevé par Canner et al. (1997). Nous avons présenté, dans un premier temps, notre base de données, en nous assurant de la fiabilité de nos mesures de tolérance au risque. Nous avons basé notre méthodologie sur celle suggérée par Elton et Gruber (2000) pour vérifier la rationalité des choix des individus. Nous avons ainsi testé l'hypothèse de la présence du théorème de séparation sur des données respectant l'ensemble possible des choix pour des investisseurs ayant une relation négative entre le ratio obligations/actions et l'indice de tolérance face au risque. Ce test a été mené en deux étapes : la première consistait à s'assurer de l'ellipticité des rendements observés sur le marché, alors que la seconde se résumait à un test de la version Black du CAPM en présence de termes d'erreurs non gaussiens. Les résultats obtenus sont en faveur de rendements elliptiques et vérifient l'hypothèse du Black-CAPM.

Il s'avère donc tout à fait vraisemblable que la contrainte sur les ventes à découvert ne soit pas serrée pour les investisseurs dans cette base de données. Le fait que très peu aient des parts négatives reflète plus un choix qu'une contrainte serrée.

Annexe 1

Tableau 1
Statistiques descriptives des données

	Moyenne	Écart type
Âge	54	13
Revenu (\$)	48 034	52 390
Montant du portefeuille (\$)	91 857	153 494
Objectif en actifs à revenus	42 %	31 %
Objectif en actifs de croissance	49 %	29 %
Objectif en actifs spéculatifs	9 %	18 %
Pondération en actions	57 %	38 %
Pondération en obligations	38 %	40 %
Pondération en liquidités	5 %	7 %
Ratio obligations/actions	0,77	2,52

Tableau 2
Distribution de l'avoir total net des investisseurs

Avoir total net (en 1 000 \$)	Moins de 25	25 à 50	50 à 100	100 à 250	250 à 500	Plus de 500
Proportion	4 %	5 %	13 %	37 %	27 %	14 %

Tableau 3
Distribution des clients en fonction des conseillers financiers

	Proportion	Description
Conseiller 1	27 %	Jeune conseiller, 3 ans d'expérience
Conseiller 2	54 %	10 ans d'expérience, ayant une clientèle étendue
Conseillers 3 et 4	19 %	15 ans d'expérience, ayant une clientèle aisée

Tableau 4
Résultats des régressions en utilisant différentes mesures de tolérance au risque

Variables indépendantes	Coefficient (<i>statistique t</i>)		
	Mesure directe (R1)	Mesure indirecte (R2)	Mesure indirecte (R3)
Constante	0,9846* (43,4066)	0,7761* (4,9701)	2,1340* (49,0278)
<i>T(dir)</i>	-1,0587* (-105,3345)		
<i>T(ind)</i>		-0,8896* (-5,7272)	
<i>T3</i>			-2,2397* (-67,8738)
Âge	0,0003 (0,9202)	0,0045* (2,6350)	0,0006 (1,3839)
Revenu (1 000\$)	0,0001 (1,0587)	-0,0006 (-1,2839)	0,0001 (0,8311)
Actif (0 à 25)	-0,0022 (-0,1227)	0,0868 (0,9273)	-0,0015 (-0,0563)
Actif (25 à 50)	-0,0100 (-0,6572)	0,0450 (0,5663)	-0,0127 (-0,5515)
Actif (50 à 100)	0,0014 (0,1200)	0,0591 (0,9899)	0,0034 (0,1968)
Actif (250 à 500)	0,0011 (0,1226)	0,0124 (0,2692)	0,0010 (0,0747)
Actif (plus de 500)	0,0031 (0,2540)	0,0941 (1,4908)	0,0068 (0,3696)
Montant du portefeuille (1 000\$)	-0,0001* (-2,9735)	-0,0006* (-3,4170)	-0,0002* (-3,2080)
Conseiller financier 1	-0,0037 (-0,4145)	-0,1724* (-3,6130)	-0,0130 (-0,9695)
Conseillers financiers 3&4	-0,0091 (-0,9051)	-0,0188 (-0,3572)	-0,0151 (-0,9905)
Compte de fonds de pension	-0,0199** (-2,5246)	0,0154 (0,3736)	-0,0293** (-2,4509)
Compte marge	0,0206 (1,9192)	-0,1037 (-1,8626)	0,0273 (1,6763)
Connaissance excellente	0,0033 (0,1818)	-0,2019** (-2,1493)	-0,0002 (-0,0058)
Connaissance passable	0,0034 (0,4540)	-0,0605 (-1,5675)	0,0033 (0,2911)
Connaissance aucune	-0,0151 (-0,8407)	-0,0363 (-0,3864)	-0,0230 (-0,8442)
	R ² = 97,40 %	R ² = 28,80 %	R ² = 94 %
Nombre d'observations	405	405	405

Notes :

* significatif à 1%; ** significatif à 5%

Les variables dichotomiques suivantes font partie de la constante : conseiller financier 2, connaissance bonne, compte marge et de fonds de pension, actif 100 à 250.

Tableau 5
Statistiques relatives aux rendements utilisés lors de notre test de séparation

	Moyenne	Écart type	Skewness	Kurtosis
Férique – Actions	0,0134	0,0395	-0,9924	5,9434
Férique – Obligations	0,0070	0,0133	0,3540	2,7708
Férique – Monnaie	0,0040	0,0011	0,8953	3,9003
Férique – Équilibré	0,0117	0,0282	-0,8186	5,7848
Talvest – Actions	0,0137	0,0483	-0,6383	7,5227
Talvest – Obligations	0,0065	0,0141	0,3682	3,2926
Talvest – Monnaie	0,0036	0,0011	0,7644	3,3844
Talvest – Équilibré	0,0101	0,0302	-0,7545	5,1402
TD – Actions	0,0146	0,0458	-1,0841	7,3410
TD – Obligations	0,0094	0,0158	0,2713	2,7007
TD – Monnaie	0,0036	0,0009	0,6045	2,7264
TD – Équilibré	0,0096	0,0234	-1,3929	7,8637

Annexe 3

Tableau 7
Résultats du test BCAPM pour les divers fonds étudiés

	Test Beaulieu et al. (2003)				Test Zhou (1993)			
	LR	DL	γ	p-value	LR	DL	γ	p-value
Fonds Férique	0,455	10	0,398	0,267	0,449	10	0,397	0,281
Fonds Talvest	1,034	15	0,362	0,249	1,016	15	0,359	0,257
Fonds TD	5,586	8	0,350	0,156	5,534	8	0,353	0,153

DL: le nombre de degrés de liberté de la distribution Student;
 γ : le rendement du portefeuille à zéro covariance.

Références

- Bajeux-Besnainou, Isabelle; James V. Jordan; Roland Portait (2003) “Dynamic Asset Allocation for Stocks, Bonds and Cash”, *The Journal of Business* 76, 2, 263–287.
- Bajeux-Besnainou, Isabelle; James V. Jordan; Roland Portait (2001) “An Asset Allocation Puzzle: Comment”, *American Economic Review* 91, 1170–1179.
- Barras, L.; O. Scaillet; R. Wermers (2005) “False Discoveries in Mutual Fund Performance: Measuring Luck in Estimated Alphas”, *Cahier de recherche No 163, FAME*.
- Beaulieu, Marie-Claude; Jean-Marie Dufour; Lynda Khalaf (2003) “Testing Black’s CAPM with Possibly non Gaussian Errors: an Exact Simulation-Based Approach”, *Cahier de recherche, Cirano, CIREQ et Université de Montréal*.
- Benartzi, S.; R. H. Thaler (2001) “Naïve Diversification Strategies in Defined Contribution Saving Plans”, *The American Economic Review* 91, 1, 79–98.
- Boyle, G.W.; G.A. Gurthie (2005) “Human Capital and Popular Investment Advice”, *Review of Finance* 9, 2, 139–164.
- Brennan, M. J.; Y. Xia (2000) “Stochastic Interest Rates and the Bond-Stock Mix”, *European Finance Review* 4, 2, 197–210.
- Brennan, M. J.; Y. Xia (2002) “Dynamic Asset Allocation under Inflation”, *The Journal of Finance* 57, 3, 1201–1238.
- Campbell, J.Y.; L. M. Viceira (2001) “Who Should Buy Long-Term Bonds?”, *The American Economic Review* 91, 1, 99–127.
- Canner, N.; N.G. Mankiw; D.N. Weil (1997) “An Asset Allocation Puzzle”, *American Economic Review* 87, 1, 181–191.
- Dufour, J.M.; L. Khalaf; M.C. Beaulieu (2003) “Exact Skewness-Kurtosis Tests for Multivariate Normality and Goodness-of-fit in Multivariate Regressions with Application to Asset Pricing Models”, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 65, 891–906.
- Elton, J.E.; J. M. Gruber (2000) “The Rationality of Asset Allocation Recommendations”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 35, 1, 28–41.
- Jarque, C. M.; A. K. Bera (1987) “A Test for Normality of Observations and Regression Residuals”, *International Statistical Review* 55, 163–172.
- Jarrow, R. (1980) “Heterogeneous Expectations, Restrictions on Short Sales and Equilibrium Asset Prices”, *Journal of Finance* 35, 1105–1113.
- Jones, C.M.; O.A. Lamont (2002) “Short-sale Constraints and Stock Returns”, *Journal of Financial Economics* 66, 207–239.

- Kilian, L.; U. Demiroglu (2000) “Residual-based Tests for Normality in Autoregressions: Asymptotic Theory and Simulation Evidence”, *Journal of Business and Economic Statistics* 18, 40–50.
- Lamont, O.A. (2004) “Short Sale Constraints and Overpricing”, *NBER Reporter*, Winter 2004/5, 16–18.
- Markowitz, H. (1952) “Portfolio Selection”, *The Journal of Finance* 7, 77–91.
- Mardia, K.V. (1970) “Measures of Multivariate Skewness and Kurtosis with Applications”, *Biometrika* 57, 519–530.
- Owen, J.; R. Rabinovitch (1983) “On the Class of Elliptical Distributions and their Applications to the Theory of Portfolio Choice”, *The Journal of Finance* 38, 3, 745–752.
- Roll, R. (1977) “A Critique of the Asset Pricing Theory’s Tests; Part I: On Past and Potential Testability of the Theory”, *Journal of Financial Economics* 4, 2, 129–176.
- Shalit et Yitzhaki (2003) “An Asset Allocation Puzzle: Comment”, *The American Economic Review* 93, 3, 1002–1008.
- Siebenmorgen, N.; M. Weber (2000) “A Behavioral Approach to the Asset Allocation Puzzle”, *Cahier de recherche No 00-46*, Université Mannheim.
- Wachter, J.A. (2003) “Risk Aversion and Allocation to Long-Term Bonds”, *Journal of Economic Theory* 112, 325–333.
- Zhou, G. (1993) “Asset-Pricing Tests under Alternative Distributions”, *The Journal of Finance* 48, 5, 1927–1942.